Maé

Réf : [PER] pp. 105-107 + pp. 30, 33 pour lemme et $\mathfrak{S}_6$

leçons :
101
(103)
104
106
123
190
191

Isomorphisme exceptionnel de $PGL_2\,\mathbb{F}_5$ sur $\mathfrak{S}_5$ et exemple d'un automorphisme extérieur de $\mathfrak{S}_6$

Le groupe projectif linéaire $PGL_2\,\mathbb{F}_5$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$.

Soit E un plan vectoriel sur un corps fini K de cardinal $q \in \mathbb{N}$.

On définit la droite projective de E $\mathbb{P}(E)$ comme l'ensemble des droites vectorielles de E.

① $PGL(E)$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}(E)$:

Le groupe linéaire $GL(E)$ agit sur $\mathbb{P}(E)$ par :
$$\begin{cases} GL(E) \times \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E) \\ u\ ,\ D \longmapsto u \cdot D := u(D) \end{cases}$$

ce qui définit un morphisme de groupes
$$\varphi : GL(E) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{P}(E))$$
dont le noyau nous est donné par le lemme :

lemme **Si $u \in GL(E)$ et u laisse invariante toute droite vectorielle de E, alors u est une homothétie.**

Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. Il existe $\lambda, \mu \in K$ tq :
$$\begin{cases} u(x) = \lambda x \\ u(y) = \mu y \end{cases}$$ et $\nu \in K$ tq $u(x+y) = \nu(x+y)$

mais $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda x + \mu y$ donc $\lambda = \mu = \nu$ et $u = \lambda\, id_E$

Donc $\ker \varphi = K^* \, id_E$ qui est aussi le centre de $GL(E)$, et comme

$$PGL(E) = GL(E)/_{Z(GL(E))} = GL(E)/_{\ker \varphi}$$

alors φ se factorise en un morphisme injectif

$$\underline{\overline{\varphi} : PGL(E) \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{P}(E))}$$

(2) Dénombrons $\mathbb{P}(E)$.

Comme chaque point de E sauf l'origine est sur une seule droite vectorielle,

$$|E| = |E \setminus \{0_E\}| + 1$$
$$= |\mathbb{P}(E)| \, |K^*| + 1$$
$$= (q-1)|\mathbb{P}(E)| + 1$$

or $|E| = |K|^2 = q^2$

donc $\underline{|\mathbb{P}(E)| = \frac{q^2-1}{q-1} = q+1}$

Donc $\mathfrak{S}(\mathbb{P}(E))$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{q+1}$

et on a une injection

$$\underline{\tilde{\varphi} : PGL(E) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{q+1}}$$

(3) Dénombrons $PGL(E)$.

$$|PGL(E)| = \frac{|GL(E)|}{|K^*|} = \frac{|GL_2 \mathbb{F}_q|}{|K|-1} = \frac{(q^2-q)(q^2-1)}{q-1}$$

$$\underline{|PGL(E)| = q(q^2-1) = q(q-1)(q+1)}$$

(4) Si $q = 5$, on a alors :

$$|PGL(E)| = 5 \times 4 \times 6 = 5!$$

donc $H := \tilde{\varphi}(PGL(E))$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$

d'indice $\frac{|\mathfrak{S}_6|}{|H|} = \frac{6!}{5!} = 6$.

Or on a le lemme :

Lemme

$\boxed{\text{Un sous-groupe de } \mathfrak{S}_n \text{ d'indice } n \text{ est isomorphe à } \mathfrak{S}_{n-1} \text{, pour tout } n \geq 5.}$

Soient H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n,

et $X := \mathfrak{S}_n/_H$ l'ensemble des classes à gauches modulo H

$= \{\sigma H \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$

alors $\mathfrak{S}_n$ agit sur X par translation :

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_n \times X & \longrightarrow X \\ \sigma, \tau H & \longmapsto \sigma\tau H \end{cases}$$

ce qui nous donne un morphisme de groupes

$\psi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$,

avec $\ker \psi \lhd \mathfrak{S}_n$, or comme $n \geq 5$

on sait que les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{id\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

Mais comme $\ker \psi \subset H$:

$|\ker \psi| \leq |H| = (n-1)! < \frac{n!}{2} = |\mathfrak{A}_n|$

donc $\ker \psi = \{id\}$ et ψ est injectif.

Or $|X| = |\mathfrak{S}_n/_H| = [\mathfrak{S}_n : H] = n$

donc ψ est un isomorphisme.

De plus, $Stab_{\mathfrak{S}_n}(H) = \{h \in \mathfrak{S}_n \mid hH = H\}$

$= H$

donc $\psi(H) = \{\sigma \in \mathfrak{S}(X) \mid \sigma(H) = H\}$

$\simeq \mathfrak{S}(X \setminus \{H\}) \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$. $\square$

Conclusion : $PGL_2\mathbb{F}_8 \simeq PGL(E) \simeq H \simeq \mathfrak{S}_5$

car $H = \tilde{\varphi}(PGL(E))$ est d'indice 6 dans $\mathfrak{S}_6$.

Corollaire : Il existe un automorphisme extérieur de $\mathfrak{S}_6$, c'est-à-dire hors de $\mathrm{Int}\,\mathfrak{S}_6 := \{ \tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_6 \}$

En reprenant les notations du lemme précédent (avec $n = 6$), on a un isomorphisme

$$\psi : \mathfrak{S}_6 \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$$

avec X de cardinal 6.

Soit $f : X \longrightarrow [\![1;6]\!]$ une numérotation de X telle que $f(H) = 1$,

on en déduit un isomorphisme

$$\alpha : \mathfrak{S}(X) \longrightarrow \mathfrak{S}_6$$

tel que : $\alpha(\psi(H)) = \alpha(\psi(\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}}(H))) = S(1)$

où $S(1) := \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_6}(1) = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_6 \mid \sigma(1) = 1 \}$.

Donc $\alpha \circ \psi : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$ est un automorphisme de $\mathfrak{S}_6$ qui envoie H sur $S(1)$.

Or si $\alpha\circ\psi$ était intérieur, H et $S(1)$ seraient conjugués, or H ne stabilise pas de point.

En effet, $H = \tilde{\varphi}(PGL(E))$ et $PGL(E)$ agit transitivement sur $\mathbb{P}(E)$ donc H agit transitivement sur $X \simeq \mathfrak{S}(\mathbb{P}(E))/H$, donc ne peut stabiliser de point.

Donc $\alpha \circ \psi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{S}_6 \setminus \mathrm{Int}\,\mathfrak{S}_6$ $\square$